

# 第1講 算数から数学への架け橋①～定義づけによる拡張～

## 1. アラビア人の数学

アラビアの代表的な数学者アル＝フワーリズミー (Al-Khuwarizmi 780?-850?) は、2次方程式

$$x^2 + 6x = 16 \cdots \textcircled{1}$$

を次のように解きました。

まず、一辺の長さが  $x$  の正方形を描きます (図1)。次に、正方形の横の辺を6だけ増やします (図2)。さらに、6だけ増やした分の半分を図3のように下に移動させて、右下に一辺の長さが3の正方形をくっつけば、一辺の長さが  $(x+3)$  の正方形が得られます (図4)。その面積は、

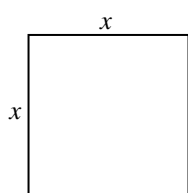
$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

です。この式と①を見比べて、①の両辺に9を加えると、

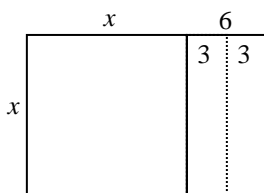
$$x^2 + 6x + 9 = 16 + 9 = 25 = 5^2$$

となるので、正方形の一辺の長さについて、

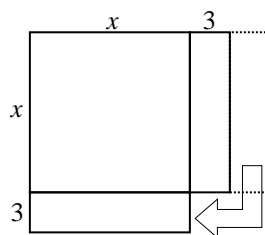
$$x + 3 = 5 \quad \text{よって } x = 2$$



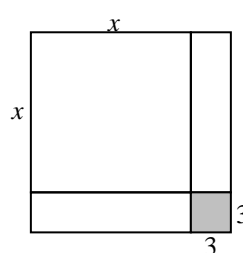
(図1)



(図2)



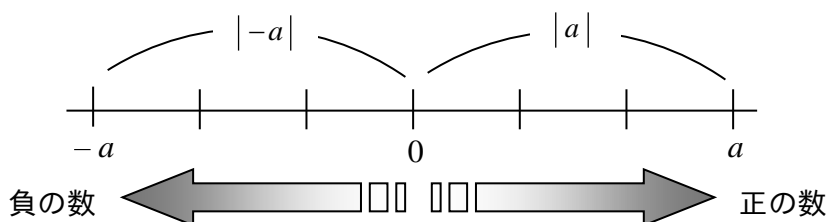
(図3)



(図4)

いかがですか。なかなか巧妙な方法を考え出したものですね。しかし、この方法には大きな欠点があります。それは、最初から  $x$  を正の数(正方形の一辺の長さ)に限定してしまっていることにあります。 $x = 2$  が①を満たす  $x$  の値の1つであることはわかりましたが、①を満たす  $x$  の値はもう1つ ( $x = -8$ ) あるのです。(もとよりその必要がなかったと考えられますが…)

## 2. 数直線とその拡張

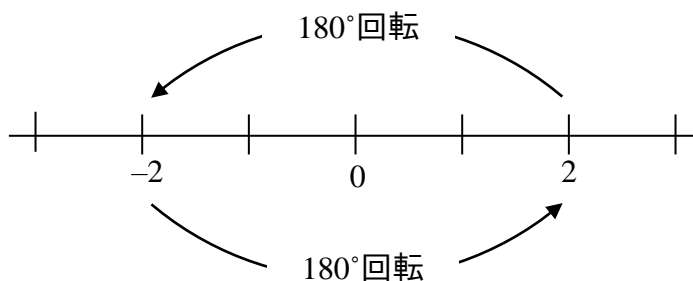


まず直線上に位置の基準を示す**原点**を定めます。そして、直線上の2つの向きの一方を向きの基準として定め、**正の向き**(通常は右の向き)と呼びます。このとき、反対の向きは**負の向き**と呼ぶことにします。さらに、長さの基準を定め、これを**単位の長さ**とします。

さて、**正の数**  $a$  は、原点から正の向きに単位の長さの  $a$  倍の距離にある位置に目盛ります。それに対して、負の向きで(原点から)同じ距離にある位置には、 $-a$  と書かれる数を目盛ります。これが**負の数**です。なお、原点には数  $0$  を目盛ります。このように数を目盛った直線が**数直線**です。

数直線上では、1つの数  $a$  に対して1つの点に対応して決まり、「この点の座標は  $a$  である」といいます。また、原点からこの点までの距離を  $a$  の**絶対値**と呼び、 $|a|$  と書きます。

## 3. 符号の反転



いま、原点  $0$  を支点として、数直線を半回転( $180^\circ$ 回転)してみましょう。このとき、例えば点  $2$  は点  $-2$  へ移ります。数  $2$  から数  $-2$  をつくるには、記号「 $-$ 」をつければよいのだから、**記号「 $-$ 」は、上のような半回転を表すと考えることができます。**

## 問題 1

---

2つの数  $a, b$  について、次のことがらが常に成り立つものには○, 成り立つとは限らないものには×を書きなさい。さらに、○をつけた場合はその理由を、×をつけた場合はその例(反例と言います)を一つ書きなさい。

- ①  $a+b>0, a \times b < 0$  ならば,  $a>0, b<0$  である。
  - ②  $a+b<0, a \times b > 0$  ならば,  $a<0, b<0$  である。
  - ③  $a-b>0, a \times b < 0$  ならば,  $a>0, b<0$  である。
  - ④  $a-b>0, a \times b > 0$  ならば,  $a>0, b>0$  である。
  - ⑤  $a-b<0, a \times b > 0$  ならば,  $a>0, b>0$  である。
- 

### 【演習問題】

5つの数  $a, b, c, d, e$  について,

$$a \times b \times c \times d \times e < 0, \quad a \times c \times e < 0, \quad d \times e > 0, \quad a < b < c < d$$

が成り立つとき,  $a, b, c, d, e$  の符号はそれぞれどのようなようになりますか。

## 問題 2

---

次の各問いに答えよ。

- (1) (i) 奇数と奇数の和は偶数になることを、文字を使って説明しなさい。  
 (ii) ある整数の各位の数の和が9の倍数ならば、その整数は9の倍数である。  
 このことを、3けたの整数について説明しなさい。
- (2) 整数  $a$  を12で割ると商が  $m$  で余りが10であり、整数  $b$  を8で割ると商が  $n$  で余りが4である。このとき、 $a+b$  を4で割ったときの余りを求めなさい、
- 

### 【演習問題】

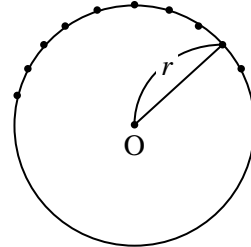
$987654321^{987654321}$  の各位の数の和を  $A$ ,  $A$  の各位の数の和を  $B$ ,  $B$  の各位の数の和を  $C$  とする。このとき、 $C$  の値を求めなさい。

## 2. 点の集合としての図形

条件に合う点が集まると1つの平面図形になります。下の4つは、その代表的なものです。

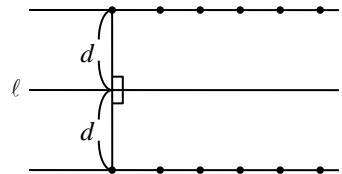
- (1) 1点  $O$  からの距離が一定  $r$  である点の集合

点  $O$  を中心とする半径  $r$  の円周



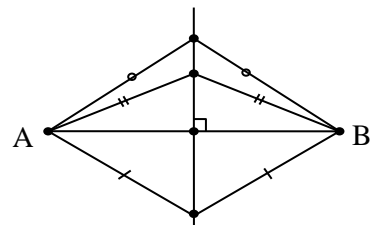
- (2) 1つの直線  $l$  からの距離が一定  $d$  である点の集合

$l$  に平行で  $l$  との距離が  $d$  である2本の直線



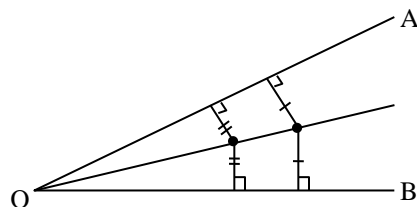
- (3) 2点  $A, B$  から等しい距離にある点の集合

線分  $AB$  の垂直二等分線



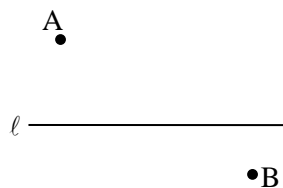
- (4)  $\angle AOB$  の2辺から等しい距離にある点の集合

$\angle AOB$  の二等分線

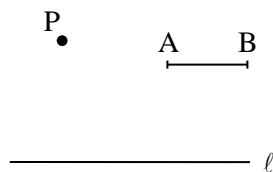


問題 1

- (1) 右の図の直線  $l$  上に中心があつて、  
2 点 A, B を通る円を作図しなさい。



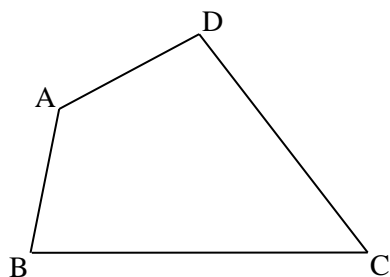
- (2) 右の図で、直線  $l$  からの距離と点 P からの距離がともに線分 AB の長さに等しい点を作図しなさい。



【演習問題】

右図の四角形 ABCD の辺 BC 上に  
次の条件をみたす点を作図しなさい。

- (1)  $AB + BP = DP$  となる点 P  
(2)  $AB + BQ = AD + DQ$  となる点 Q



## 問題2

平面上に $\triangle ABC$  が与えられているとき、

- (1)  $\triangle ABC$  の3つの頂点をすべて通る円を作図しなさい。
- (2)  $\triangle ABC$  のすべての辺に接する円を作図しなさい。
- (3)  $\triangle ABC$  の内部に1点Pをとり、 $\triangle PAB$ ,  $\triangle PBC$ ,  $\triangle PCA$  の面積がすべて等しくなるようにしなさい。

### 【演習問題】

右図において、 $BD, BC, CE$  のすべてに接する円を作図しなさい。

