第１講　算数から数学への架け橋①～定義づけによる拡張～

１.アラビア人の数学

アラビアの代表的な数学者アル＝フワーリズミー（Al-Khuwarizmi780?-850?）は，2 次方程式

$x^2 + 6x = 16$ …①

を次のように解きました．

まず，一辺の長さが x の正方形を描きます（図１）．次に，正方形の横の辺を 6 だけ増やします（図２）．さらに，6 だけ増やした分の半分を図３のように下に移動させて，右下に一辺の長さが 3 の正方形をくっつければ，一辺の長さが$(x + 3)$の正方形が得られます（図４）．その面積は，

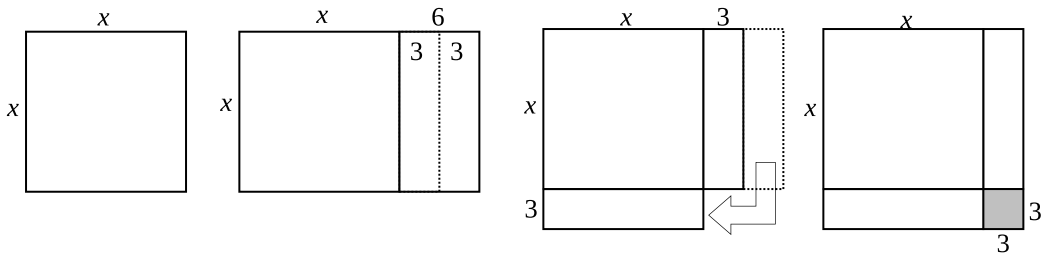
$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

です．この式と①を見比べて，①の両辺に 9 を加えると，

$x^2 + 6x + 9 = 16 + 9 = 25 = 5^2$

となるので，正方形の一辺の長さについて，

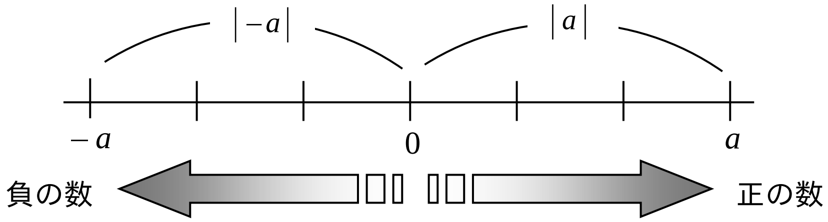
$x + 3 = 5$　　よって $x = 2$



（図１）　（図２）　（図３）　（図４）

いかがですか．なかなか巧妙な方法を考え出したものですね．しかし，この方法には大きな欠点があります．それは，最初から x を正の数(正方形の一辺の長さ)に限定してしまっていることにあります．$x = 2$ が①を満たす x の値の 1 つであることはわかりましたが，①を満たす x の値はもう 1 つ（$x = -8$）あるのです．
(もとよりその必要がなかったと考えられますが…)

2.数直線とその拡張

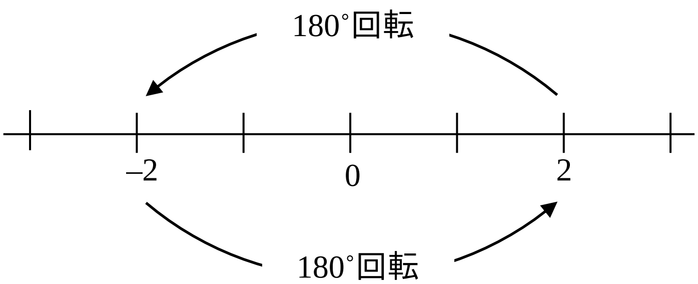


まず直線上に位置の基準を示す**原点**を定めます．そして，直線上の 2 つの向きの一方を向きの基準として定め，**正の向き**(通常は右の向き)と呼びます．このとき，反対の向きは**負の向き**と呼ぶことにします．さらに，長さの基準を定め，これを**単位の長さ**とします．

さて，**正の数** a は，原点から正の向きに単位の長さの a 倍の距離にある位置に目盛ります．それに対して，負の向きで(原点から)同じ距離にある位置には，$-a$ と書かれる数を目盛ります．これが**負の数**です．なお，原点には数 0 を目盛ります．このように数を目盛った直線が**数直線**です．

数直線上では，1 つの数 a に対して 1 つの点が対応して決まり，「この点の座標は a である」といいます．また，原点からこの点までの距離を ***a* の絶対値**と呼び，$|a|$ と書きます．

3.符号の反転



いま，原点 0 を支点として，数直線を半回転(180˚回転)してみましょう．このとき，例えば点 2 は点– 2 へ移ります．数 2 から数– 2 をつくるには，記号「–」をつければよいのだから，**記号「–」は，上のような半回転を表す**と考えることができます．

問題 1

2 つの数 a, b について，次のことがらが常に成り立つものには〇，成り立つとは限らないものには×を書きなさい．さらに，〇をつけた場合はその理由を，×をつけた場合はその例(反例と言います)を一つ書きなさい．

① $a+b>0, a\times b<0$ ならば，$a>0, b<0$ である．

② $a+b<0, a\times b>0$ ならば，$a<0, b<0$ である．

③ $a-b>0, a\times b<0$ ならば，$a>0, b<0$ である．

④ $a-b>0, a\times b>0$ ならば，$a>0, b>0$ である．

⑤ $a-b<0, a\times b>0$ ならば，$a>0, b>0$ である．

【演習問題】

5 つの数 a, b, c, d, e について，

$$a\times b\times c\times d\times e<0,\quad a\times c\times e<0,\quad d\times e>0,\quad a<b<c<d$$

が成り立つとき，a, b, c, d, e の符号はそれぞれどのようになりますか．

問題２

次の各問いに答えよ.

(1) (i) 奇数と奇数の和は偶数になることを，文字を使って説明しなさい.

(ii) ある整数の各位の数の和が 9 の倍数ならば, その整数は 9 の倍数である.
このことを，3 けたの整数について説明しなさい.

(2) 整数 a を 12 で割ると商が m で余りが 10 であり，整数 b を 8 で割ると商が n で余りが 4 である. このとき, $a+b$ を 4 で割ったときの余りを求めなさい,

【演習問題】

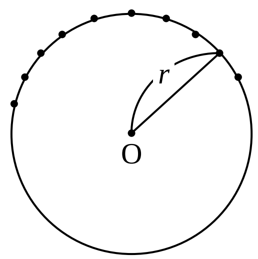
$987654321^{987654321}$ の各位の数の和を A, A の各位の数の和を B, B の各位の数の和を C とする．このとき，C の値を求めなさい.

2．点の集合としての図形

条件に合う点が集まると 1 つの平面図形になります．下の 4 つは，その代表的なものです．

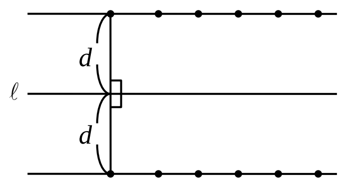
(1) 1 点 O からの距離が一定 r である点の集合

点 O を中心とする半径 r の円周



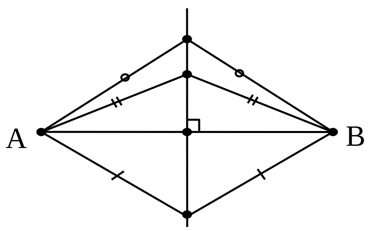
(2) 1 つの直線 ℓ からの距離が一定 d である点の集合

ℓ に平行で ℓ との距離が d である 2 本の直線



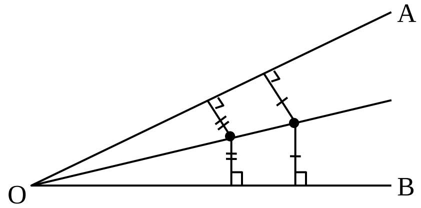
(3) 2 点 A, B から等しい距離にある点の集合

線分 AB の垂直二等分線



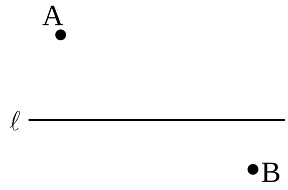
(4) ∠AOB の 2 辺から等しい距離にある点の集合

∠AOB の二等分線

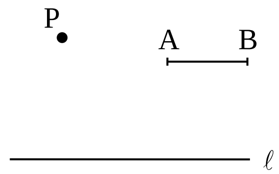


問題 1

(1) 右の図の直線 ℓ 上に中心があって，
2 点 A, B を通る円を作図しなさい．



(2) 右の図で，直線 ℓ からの距離と点 P からの
距離がともに線分 AB の長さに等しい点を
作図しなさい．

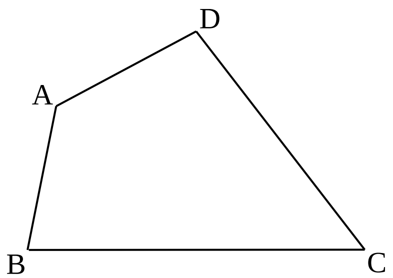


【演習問題】

右図の四角形 ABCD の辺 BC 上に
次の条件をみたす点を作図しなさい．

(1) AB + BP = DP となる点 P

(2) AB + BQ = AD + DQ となる点 Q



問題２

平面上に△ABC が与えられているとき，

(1) △ABC の 3 つの頂点をすべて通る円を作図しなさい．

(2) △ABC のすべての辺に接する円を作図しなさい．

(3) △ABC の内部に 1 点 P をとり，△PAB, △PBC, △PCA の面積がすべて等しくなるようにしなさい．

【演習問題】

右図において，BD, BC, CE のすべてに接する円を作図しなさい．